Chapitre 4 : corrigé

Exercice 4.2

Soit, dans un repère Oxyz, le tenseur homogène des contraintes, σ_{ij}, suivant :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 300 & -200 \\ 300 & 100 & -200 \\ -200 & -200 & 600 \end{pmatrix} = 100 \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \text{ (MPa)}$$

Que signifie tenseur homogène ?

Un tenseur homogène est un tenseur qui ne varie pas dans l'espace cad qu'il n'est pas fonction de la position M ie de x,y ou z. Il pourrait cependant varier avec le temps.

Quelle est la force (vecteur puis norme en Newton) agissant sur la surface triangulaire ABC donnée dans la figure ci-dessous ?

Le triangle (ABC) a pour équation : x/4 +y/3 + z = 1

$A(4,0,0)$, $B(0,3,0)$ et $C(0,0,1)$!!!! cm

$$AB \times BC = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ et } n = \frac{1}{\sqrt{25+144}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{169}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$t = \sigma n = \frac{100}{13} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \frac{100}{13} \begin{pmatrix} -9 \\ -11 \\ 58 \end{pmatrix} \text{ en MPa}$$

$$\text{Surface} = S = \frac{1}{2} \| AB \times BC \| = \frac{\sqrt{169}}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ cm2}$$

$$\mathbf{F} = \sigma n S = \frac{100}{13} \begin{pmatrix} -9 \\ -11 \\ 58 \end{pmatrix} \frac{13}{2} = 50 \begin{pmatrix} -9 \\ -11 \\ 58 \end{pmatrix} \text{ X 100 N (MNcm2/m2= } 10^6 \text{X} 10^{-4} \text{N=100 N)} = 5000\sqrt{9^2+11^2+58^2} = 298.6 \text{ kN}$$

Vecteur densité de force agissant sur l'ellipsoïde de révolution de demi-axes OA, OB et OC au point D (0, 3/2, $\sqrt{3}/2$)

L'ellipsoïde a pour équation :

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{1}\right)^2 = 1 \quad D(0, 3/2, \sqrt{3}/2) \text{ est bien sur l'ellipsoide}$$

$$\text{On pose } f(x,y,z) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 + \left(\frac{z}{1}\right)^2 \; ; \; \text{gradf} = \begin{pmatrix} x/8 \\ 2y/9 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ en D, } n = \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$t = \sigma n = \frac{100}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{50}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 3-6\sqrt{3} \\ 1-6\sqrt{3} \\ -2+18\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ en MPa}$$

Valeurs propres du tenseur σ.

$$\det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & -2 \\ 3 & 1-x & -2 \\ -2 & -2 & 6-x \end{pmatrix} = (1-x)\big((1-x)(6-x)-4\big) - 3\big(3(6-x)-4\big) - 2(-6+2(1-x))$$

$= -x^3 + 8x^2 + 4x - 32 = -(x+2)(x-2)(x-8) = 0$. Les vp sont 800 MPa, 200 MPa et -200 MPa.

Vecteur propre associés aux 3 valeurs propres

n ? tel que $\sigma n = 100\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} n = -200n$. On trouve $n_I = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

n ? tel que $\sigma n = 100\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} n = 200n$. On trouve $n_{II} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $n_{III} = n_I \otimes n_{II} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Représentez graphiquement le tri-cercle de Mohr associé à ce tenseur des contraintes en explicitant ce qu'il représente.

le tri-cercle de Mohr associé à ce tenseur des contraintes représente l'ensemble des couples (t_n, t_τ) quand la normale n balaie l'espace. Il renseigne sur le maximum de cisaillement.

Exercice 4.5

Soit $(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ un repère orthonormé. On considère un tenseur σ donné par :

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \sigma_0 = 10\text{MPa}$$

Calculer la trace, le deuxième invariant et le déterminant de σ.

$$\sigma = \sigma_0\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} (\sigma_0 = 10 \text{ MPa}),\ \text{tr}\sigma = \sigma_0\ ,\ \Sigma_{II} = -\alpha^2\sigma_0^2 \text{ et } \det\sigma = -\alpha^2\sigma_0^3$$

On effectue une rotation de 45° autour de $\mathbf{e_1}$. Exprimer la matrice de passage P vers le nouveau repère (X'=PX) et le tenseur σ dans le nouveau repère.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} (c = \cos 45°) \text{ et } \sigma' = P\sigma P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

Déterminer alors les valeurs propres du tenseur σ et les vecteurs propres associées.

Les vp sont 10 MPa, α10 MPa et –α10 MPa et les vecteurs propres sont ex et ey et ez tournés de 45° autour de ex.

Dans le repère propre, déterminer les composantes normale, t_n, et tangentielle, t_τ, de la densité de forces de contact, t, pour la direction $x_1 = x_2 = x_3$ en fonction de α.

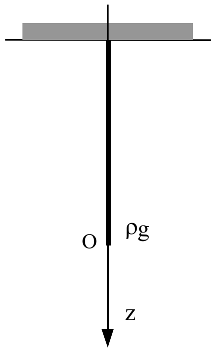
$$n = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } t = \sigma n = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ -\alpha \end{pmatrix},\ t_n = \sigma n.n = \frac{\sigma_0}{3} \text{ et } t_\tau = \sqrt{t^2 - t_n^2} = \frac{\sigma_0}{3}\sqrt{2+6\alpha^2}$$

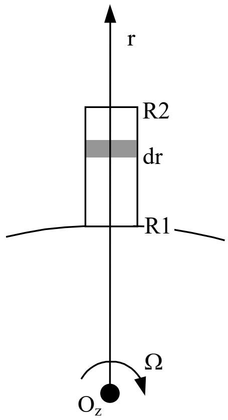
Exercice 4.13 Tension sur un câble suspendu et sur une aube de turbine

Calculer la tension :

(a) le long d'un câble suspendu de section constante, soumis à la gravitation.

(b) le long d'une aube de turbine de section constante, tournant autour d'un axe O_z à une vitesse angulaire Ω. Pour ce cas, on néglige la gravité et on déterminera la densité de force centrifuge volumique au point distant de r du centre de rotation.





Tension le long d'un câble suspendu de section constante, soumis à la gravitation.
La contrainte s'exerce selon z et ne dépend que de z : $\sigma_{zz} = \sigma(z)$. Les autres composantes des contraintes sont nulles. On note –H la position d'attache du câble.

$\mathrm{div}\sigma + \rho g = 0$ donne selon z: $\dfrac{\partial \sigma}{\partial z} + \rho g = 0$ Ainsi $\sigma = -\rho g z + A$

avec A =0 car $\sigma = 0$ en z = 0 (section inférieure du cable)

En z = -H, $\sigma = \rho g H = \rho g S H / S = mg/S$ avec S : section du cable

Tension le long d'une aube de turbine de section constante, tournant autour d'un axe O_z à une vitesse angulaire Ω. Pour ce cas, on néglige la gravité et on déterminera la densité de force centrifuge volumique au point distant de r du centre de rotation.
On travaille en coordonnées cylindriques. Le tenseur des contraintes ne dépend que de r en régime permanent i.e. à vitesse angulaire constante. La force volumique n'est plus la gravité mais la force centrifuge. Un petit élément de masse m et de volume Δv subit une force centrifuge valant $mV^2/r = mr\omega^2 = \rho \Delta v r \omega^2$ avec V la vitesse et r la distance au centre. Cette force divisée par le volume Δv correspond à la densité de force volumique f soit $f = \rho r \omega^2$ portée par u_r. L'équilibre statique nous donne alors :

$\overrightarrow{\mathrm{div}}\sigma(r) + \vec{f} = \vec{0}$ avec $\vec{f} = \rho\omega^2 r \vec{u}_r$ soit selon $\vec{e}_r$: $\dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\sigma_r}{r} + \rho\omega^2 r = 0$ avec $\sigma_r = \sigma_{rr}$ et $\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$

$r\dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r = -\rho\omega^2 r^2$, on cherche une solution particulière sous la forme Ar^m.

$Amr^m + Ar^m = -\rho\omega^2 r^2$ donc m = 2 et $3A = -\rho\omega^2$ soit $\sigma_r = -\dfrac{\rho\omega^2}{3} r^2$

Solution homogène: $r\dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r = 0$, $\sigma_r = B/r$

Solution générale: $\sigma_r = -\dfrac{\rho\omega^2}{3} r^2 + B/r$ avec $\sigma_r = 0$ en $r = R_2$

$$\sigma_r = -\frac{\rho\omega^2}{3} r^2 + \frac{\rho\omega^2}{3} R_2^3/r = \frac{\rho\omega^2}{3}\left(R_2^3/r - r^2\right)$$

NB: en R1, $\sigma_r = \dfrac{\rho\omega^2}{3}\left(R_2^3/R_1 - R_1^2\right)$

NB: si $R_2 = R_1 + \varepsilon$, $\sigma_r = \dfrac{\rho\omega^2}{3R_1}\left(R_1^3 + 3\varepsilon R_1^2 - R_1^3\right) = \dfrac{\rho R_1^2 \omega^2}{SR_1}\left(R_2 - R_1\right)S$

$\sigma_r = m\dfrac{R_1^2\omega^2}{SR_1} = m\dfrac{R_1\omega^2}{S}$ = force centrifuge /section